تقنية التحكم الآلي - نظري

تحليل منظومة التحكم

الوحدة الثالثة : تحليل منظومة التحكم

الأهداف :

بعد انتهائك من دراسة هذه الوحدة تكون قادرا على:

- معرفة إيجاد دالة التحويل للنظم
- معرفة التحليل الزمني لأنظمة التحكم
- التعرف على إشارات الدخل النموذجية
- التعرف على أصناف نظم التحكم

التعرف على إيجاد الخطأ

تعريف الاستجابة الدائمة والعابرة لنظم الرتبة الأولى والثانية

التعرف على منحنى الخواص لأنظمة التحكم

٣- ١. دالة التحويل Transfer Function

تعتمد نظرية التحكم في الأنظمة على تواجد دالة تستخدم لتحديد العلاقة بين دخل وخرج النظام والتي تسمى دالة التحويلtransfer function. وعلى ذلك فإن دالة التحويل تعرف بأنها النسبة بين التحويل اللابلاسي للخرج إلى التحويل اللابلاسي للدخل في حالة ما تكون جميع القيم الابتدائية initial conditions مساوية للصفر. وبدراسة نظام يتغير خطيا مع الزمن والمعروف بالمعادلة التفاضلية الآتية:

$$a_o y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{n-1}} y + a_n y = b_o \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \ldots + b_{m-1} x + b_m x \quad (\mathrm{n} \geq \mathrm{m}) \qquad (1\text{-}3)$$

حيث إن:

خرج النظام y= output of the system

دخل النظام x=input of the system

وبأخذ التحويل اللابلاسي لكل من جانبي المعادلة (1-3) وبفرض أن جميع القيم الابتدائية مساوية للصفر فإن:

$$\text{Transfer Function} = \mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{X(s)}} = \frac{b_o\ s^m b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_o\ s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots. + a_{n-1} s + a_n} \qquad (2\text{-}3)$$

ويمكن تعريف دالة التحويل بالعلاقة بين تحويل لابلاس لخرج النظام ودخله وهي معرفة كالآتي:

$$\text{دالة التحويل} = \frac{\text{تحويل لابلاس الخرج}}{\text{تحويل لابلاس الدخل}}$$

مثال (1-3):

أوجد دالة نقل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي الآتي:

y'(t)+y(t)=2x(t)0.1

الخطوة الأولى:

قم بتحويل لابلاس لطرفي معادلة النظام لتصبح المعادلة كالآتي

$$sY(s)+Y(s)=2X(s)0.1$$

الخطوة الثانية:

خذ $Y(s)$ كعامل مشترك في الطرف الأيسر من المعادلة ليصبح كالآتي

$$(s+1)Y(s)=2X(s)0.1$$

الخطوة الثالثة:

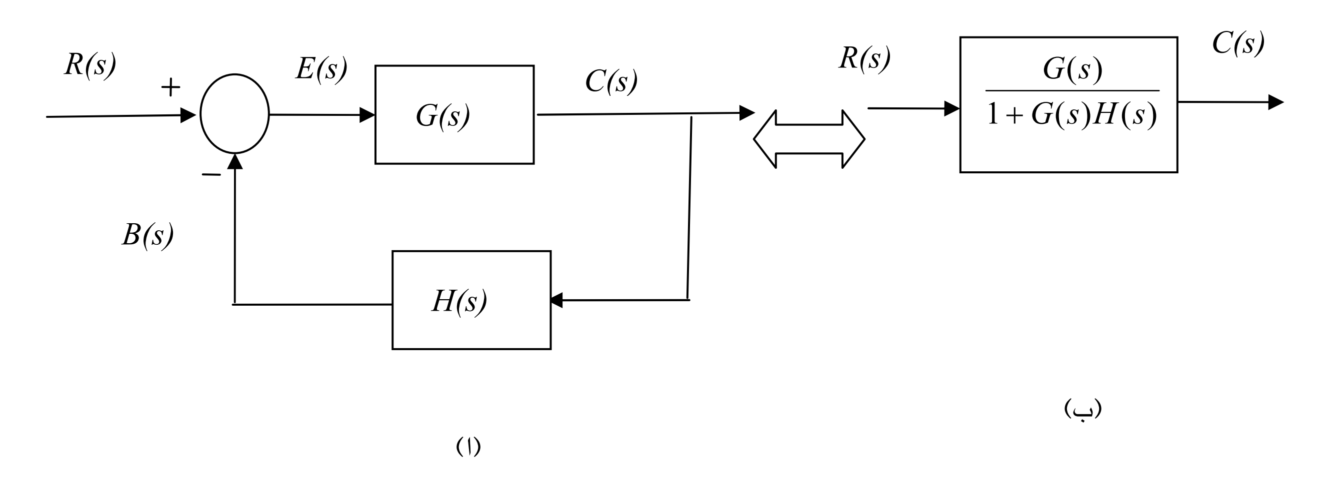
اقسم تحويل لابلاس الخرج على تحويل لابلاس الدخل لتحصل على دالة نقل النظام كالآتي:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{0.1s+1}$$

دالة تحويل حلقة تغذية خلفية نموذجية

يوضح الشكل(3-1)(أ) مخططاً صندوقياً لحلقة تغذية خلفية نموذجية.

للحصول على دالة التحويل لحلقة تغذية خلفية نموذجية نتبع الخطوات الآتية.



شكل(3-1) حلقة تغذية خلفية نموذجية

من الشكل(3-1)(أ) نكتب المعادلات الآتية

$$E(s)=R(s)-B(s)$$

علما أن

$$B(s)=C(s)H(s)$$

ومن ثم

$$E(s)=R(s)-C(S)H(s)$$

وحيث إن

$$C(s)=E(s)G(s)$$

نحصل على

$$C(s)=[R(s)-C(s)H(s)]G(s)$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة نحصل على

$$C(s)[(1+G(s)H(s)]=R(s)G(s)$$

ومن ثم نحصل على دالة نقل الحلقة المغلقة كالآتي

$$T(s)\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

وذالك ما تم تمثيله من خلال الشكل 1-10 (ب) المكافئ للحلقة المغلقة في حالة التغذية الأحادية (unity feedback)

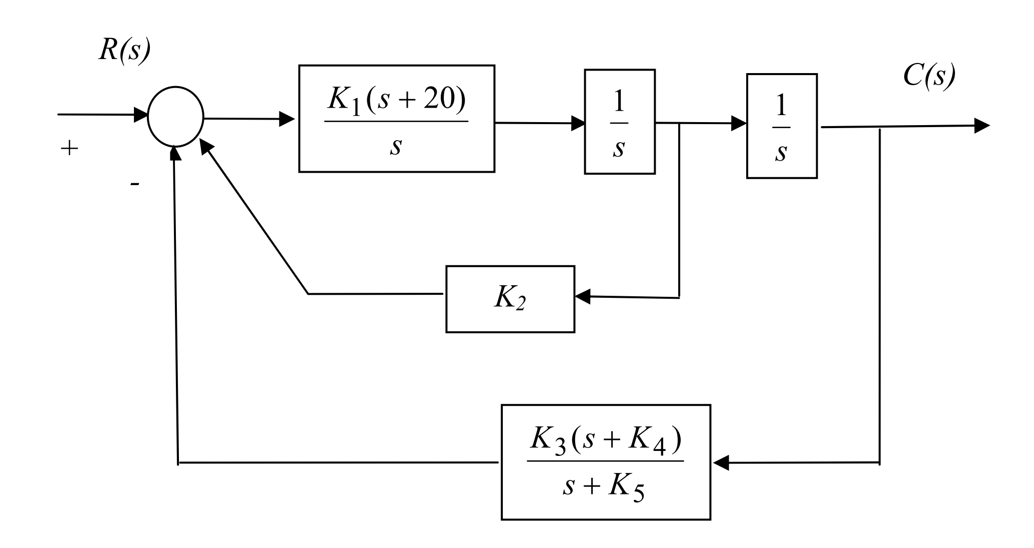
$$H(s)=1$$

فإن دالة نقل الحلقة المغلقة تصبح كالآتي:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

مثال (٣- ٢):

أوجد دالة التحويل للمخطط الصندوقي الموضح في الشكل(٣- ٢) مستخدما طرق التبسيط السابقة



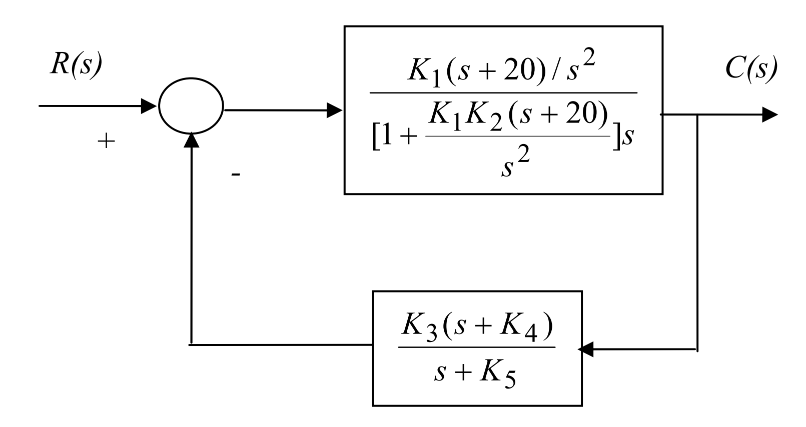
الشكل(3-2) المخطط الصندوقي لنظام المثال(3-2)

الحل:

١. ابدأ بتحويل وصلة التجميع إلى وصلتي تجميع على التوالي، ثم ادمج دالتي التحويل $\frac{K_1(s+20)}{s}$ و $\frac{1}{s}$ في صندوق واحد.

٢. استبدل الحلقة المغلقة الداخلية بصندوق واحد مستخدما قانون التغذية الخلفية ثم قم بإدماج الناتج مع دالة التحويل $\frac{1}{s}$ كونها توالي معه.

٣. من الخطوة الأولى والثانية نحصل على الحلقة المغلقة المبسطة المبينة في الشكل(3-3)



الشكل(3-3) المخطط الصندوقي المبسط لمثال(2-3)

٤. من الشكل(3-3) نحصل عل دالة نقل النظام الإجمالي T(s)

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_1(s+20)(s+k_5)}{s[(s^2+K_1K_2(s+20)][s+K_5]+K_1K_3(s+20)(s+K_4)}$$

٣- ٢. التحليل الزمني لأنظمة التحكم Time Domain Analysis of Control Systems

في أنظمة التحكم والتي تكون دوال في الزمن فإن دراسة الاستجابة الزمنية تكون عاملاً مهماً في تحليل وتصميم الأنظمة. وتتكون الاستجابة الزمنية للنظام من جزأين أولهما الاستجابة العابرة transient response والآخر استجابة مستقرة الحالة steady state response ويعبر عنها بخرج النظام كالتالي:

$$C(t)=C_t(t)+C_{ss}(t)$$

حيث إن:

الاستجابة العابرة $C_t(t) = \text{transient response}$

الاستجابة المستقرة $C_{ss}(t) = \text{steady state response}$

ويتكون حل معادلة النظام بالنسبة لدخل وخرج النظام بدلالة الزمن من جزأين يمثلان الاستجابة العابرة والمستقرة للنظام. والفرق بين الاستجابة المستقرة الحالة والدخل المقارن Reference input يعرف بالخطأ المستقر steady state error.

٣- ٢- ١. إشارات الدخل النموذجية Typical Input Signals

إن إشارات الدخل لأنظمة التحكم غالبا تكون غير معروفة مسبقا وفي تحليل ودراسة أنظمة التحكم لابد من توافر قاعدة معروفة لمقارنة خصائص أنظمة التحكم المختلفة. وتعتمد هذه القاعدة على اختيار إشارات اختبار معينة (إشارات دخل). هذه الإشارات تتم مقارنة استجابة الأنظمة المختلفة لها عند إدخالها للأنظمة. ومن أهم الدوال شائعة الاستخدام دالة الخطوة step ودالة الانحدار ramp ودالة العجلة acceleration وكذلك دالة الدفعة impulse وغيرها من الدوال. وكما ذكرنا عن بعض هذه الدوال في الفصل الثاني فسوف ندرسها هنا بطريقة مشابهة نظرا لأهميتها في دراسة الاستجابة الزمنية لأنظمة التحكم.

٣- ٢- ٢. تصنيف أنظمة التحكم Classification of Control Systems

أ- رتبة النظام Order of System

تعرف رتبة النظام بأنها أعلى درجة للمتغير S في مقام دالة التحويل الكلية. معادلة المقام هذه تسمى معادلة الخواص Characteristic equation وعندما يكون البسط والمقام لدالة التحويل كثيرة الحدود في s وفيما يلي سوف نستعرض الخطوات اللازمة لحساب رتبة النظام :

١- يتم كتابة المعادلات التي تربط دخل وخرج النظام.
٢- يتم إجراء التحويل اللابلاسي للمعادلة مع فرض أن القيم الابتدائية تساوى الصفر.
٣- يتم حساب دالة التحويل للنظام وتحويلها إلى دالة كثيرة الحدود في s.
٤- أعلى درجة للمتغير s في مقام دالة التحويل يدل على رتبة النظام.

ب- نوع النظام Type of System

طريقة أخرى لتصنيف أنظمة التحكم هي تقسيمها طبقا لنوع النظام ولتحديد نوع النظام نتبع الخطوات التالية:

١- يتم تحديد دالة التحويل الأمامية G(s) وكذلك دالة التحويل الخلفية H(s) للنظام.

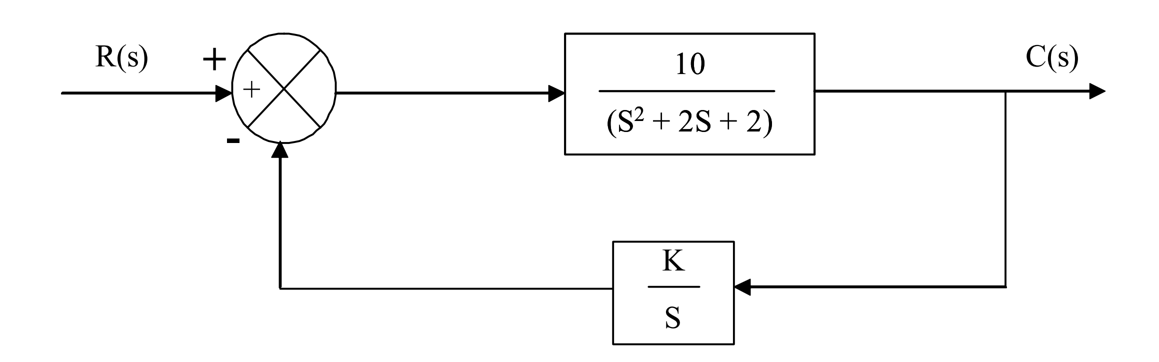
٢- يتم حساب دالة التحويل G(s).H(s) للدائرة المفتوحة.

٣- يتم ترتيب مقام دالة التحويل G(s).H(s) تنازليا لدرجة المتغير S.

٤- أعلى درجة للمتغير S في المقام تدل على نوع النظام.

مثال(3-3):

احسب الرتبة والنوع لنظام التحكم المبين في الشكل(3-5)



الشكل(3-5) مخطط صندوقي لنظام تحكم.

الحل:

دالة التحويل الكلية لهذا النظام تكون كالتالي:

$$G(s) = \frac{10s}{s(s^2 + 2s + 2) + 10K} = \frac{10s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 10K}$$

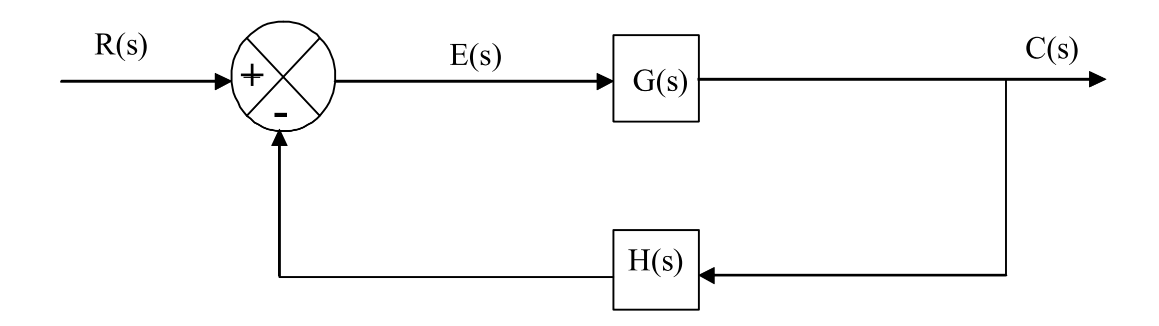
وبالنظر إلى أعلى رتبة للمتغير S في المقام نجد أنه ٣ ولذلك يكون هذا النظام من الرتبة الثالثة. أما دالة التحويل للدائرة المفتوحة لهذا النظام فتكون كالتالي:

$$G(s)H(s)=\frac{10K}{s(s^2+2s+2)}=\frac{10K}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

وبالنظر إلى أعلى درجة في المقام نجد أنه ١ ولذلك يكون هذا النظام من النوع (أ).

٣- ٢- ٣. خطأ حالة الاستقرار Steady State Error

بدراسة نظام التحكم المبين بالشكل (3-5) نجد أن دالة التحويل الكلية تكون كالتالي:



الشكل(3-6) نظام تحكم.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

وبدراسة المخطط الصندوقي لهذا النظام نجد أن إشارة الخطأ هي:

$$E(s)=R(s)-C(s)H(s)$$
$$E(s)=R(s)-E(s)G(s)H(s)$$
$$E(s)+E(s)G(s)H(s)=R(s)$$
$$E(s)(1+G(s)H(s))=R(s)$$

فتكون دالة التحويل بين إشارة الخطأ E(s) وإشارة الدخل R(s) كالتالي:

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

حيث إن إشارة الخطأ E(s) هي الفرق بين إشارة الدخل وإشارة التغذية الخلفية وعلى ذلك فإن :

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

أي أن خطأ حالة الاستقرار الفعلي هو:

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (9\text{-}3)$$

أ- خطأ حالة الاستقرار Static Error

بتطبيق المعادلة (9-3) مع دخل دالة خطوة قيمتها الواحد فإن خطأ حالة الاستقرار يكون كالتالي:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\ \frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

فيكون K_P معامل خطأ الوضع Static error وخطأ حالة الاستقرار كالتالي:

$$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=G(0)H(0)$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_P}$$

ب- خطأ السرعة Velocity Error

بتطبيق المعادلة (3-9) مع دخل دالة الانحدار قيمتها الواحد فإن خطأ حالة الاستقرار يكون كالتالي:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\ \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)H(s)}$$

فيكون K_v معامل خطأ السرعة Speed error constant كالتالي:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) \qquad (10\text{-}3)$$

أما خطأ حالة الاستقرار بدلالة معامل خطأ السرعة فيكون:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad (11\text{-}3)$$

ج- خطأ حالة الاستقرار في حالة دخل دالة العجلة Steady State Error for Acceleration Input

بتطبيق المعادلة (3-9) مع دخل دالة عجلة قيمتها الواحد فان خطأ حالة الاستقرار يكون كالتالي:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\ \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim s^2 G(s)H(s)}$$

فيكون K_a معامل خطأ العجلة acceleration error constant كالتالي:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)\,H(s) \qquad (12\text{-}3)$$

أما خطأ حالة الاستقرار بدلالة معامل خطأ العجلة فيكون:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad (13\text{-}3)$$

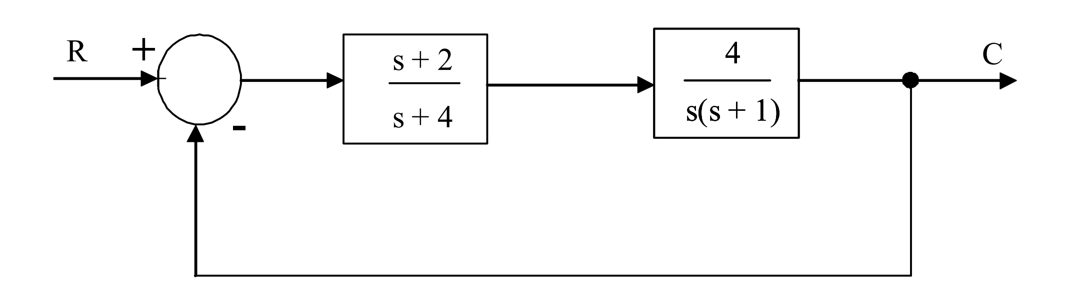
الجدول (3-1) يلخص خطأ حالة الاستقرار لكل الأنظمة ذات الأنواع (0,1 and 2) عندما تغذى من إشارات دخل مختلفة .

	دخل دالة الخطوة $r(t) = 1$	دخل دالة الانحدار $r(t) = t$	دخل دالة العجلة $r(t) = t^2$
نظام Type 0	$1 / (1 + K)$	∞	∞
نظام Type 1	0	$1 / K$	∞
نظام Type 2	0	0	$1 / K$

جدول (3-1) خطأ حالة الاستقرار بدلالة K.

مثال (3-4):

أوجد معاملات الخطأ المختلفة (الوضع K_p - السرعة K_v العجلة K_a) لنظام التحكم المتزن المبين في الشكل(3-7). ثم أوجد خطأ حالة الاستقرار e_{ss} في كل من حالة دخل دالة الخطوة ودالة الانحدار ودالة العجلة.



الشكل(3-7) نظام تحكم متزن.

الحل:

باستخدام المعادلات(3-10) و(3-12) ينتج التالي:

Static Position error constant $$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = \infty$$

Static Velocity error constant $$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = 2$$

Static Acceleration error constant $$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{S4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = 0$$

أ- خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دخل دالة الخطوة قيمتها الوحدة من معادلة (3-9) كالتالي:

$$e_{ss} = 1/(1+K_p)$$
$$e_{ss} = 1/(1+\infty) = 0$$

ب- خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دخل دالة الانحدار قيمتها الوحدة من معادلة (3-11) كالتالي:

$$e_{ss} = 1/K_v$$

$$e_{ss} = 1/2.$$

خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دخل دالة العجلة قيمتها الوحدة من معاملة (3-13) كالتالي:

$$e_{ss} = 1/K_a$$
$$e_{ss} = 1/0 = \infty$$

مثال(3-5):

أوجد خطأ حالة الاستقرار e_{ss} في كل حالة من الحالات الآتية :

أ- نظام من Type 0 بدخل دالة الخطوة ومعامل خطأ الوضع $K_p = 1/19$

ب - نظام من Type 1 بدخل دالة الانحدار ومعامل خطأ السرعة $K_v = 0.2$

ج - نظام من Type 2 بدخل دالة العجلة ومعامل خطأ العجلة $K_a = 0.5$

الحل:

أ- خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دالة الخطوة لنظام Type 0 ومعامل خطأ الوضع $K_p = 1/19$ يكون كالتالي:

$$e_{ss} = 1/(1 + K_p) = 1/[1 + (1/19] = 0.95$$

ب - خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دالة الانحدار لنظام Type 1 ومعامل خطأ السرعة $K_v = 0.2$ يكون كالتالي:

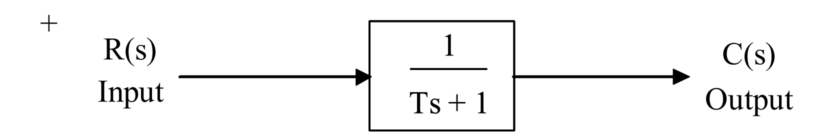
$$e_{ss} = 1/K_v = 1/0.2 = 0.95$$

ج - خطأ حالة الاستقرار e_{ss} مع دالة العجلة لنظام Type 2 ومعامل خطأ العجلة $K_a = 0.5$ ويكون كالتالي:

$$e_{ss} = 1/K_a = 1/0.5 = 2$$

٣- ٢- ٤. الاستجابة العابرة للأنظمة ذات الرتبة الأولى Transient Response of First Order Systems

لدراسة الاستجابة العابرة لنظام تحكم من الرتبة الأولى كما هو مبين بالشكل (3-8) حيث إن درجة S في المقام هي واحد.



الشكل(3-8) نظام من الرتبة الأولى.

وسوف ندرس استجابة هذا النظام $c(t)$ عندما يكون الدخل دالة الخطوة بقيمة الواحدة unit step function أي أن:

$$r(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$r(t) = 1 \qquad t > 0$$
$$R(s) = 1/s \qquad (14\text{-}3)$$

وكما في المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-5) والذي يوضح العلاقة بين الدخل والخرج، نجد أن الخرج هو:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} R(s) \qquad (15\text{-}3)$$

وبالتعويض من معادلة (3-14) في (3-15) ينتج:

$$C(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} \qquad (16\text{-}3)$$

حيث إن T يعرف بأنه مقدار ثابت يسمى الثابت الزمني ولإيجاد الاستجابة $C(t)$ نستخدم طريقة الكسور الجزئية partial fraction وتحويل اللابلاسي العكسي inverse laplace كالتالي:

$$\frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{Ts+1}$$

ونحسب قيم الثوابت A_1, A_2 كالتالي:

$$A_1 = \left| s\frac{1}{s(Ts+1)} \right|_{s=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$A_2 = \left| (Ts+1)\frac{1}{s(Ts+1)} \right|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{\frac{1}{T}} = -T$$

و بالتعويض عن هذه الثوابت في المعادلة الأولى نحصل على:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{-T}{Ts+1}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(\frac{1}{T})}$$

وباستخدام التحويل العكسي للابلاس تكون الاستجابة للأنظمة ذات الرتبة الأولى هي:

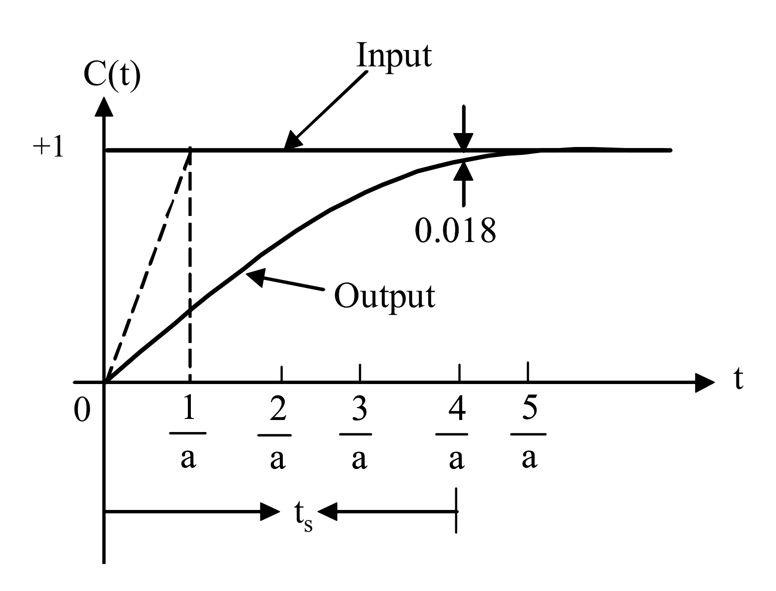
$$C(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s}] - L^{-1}[\frac{1}{s+(\frac{1}{T})}]$$

$$C(t) = 1 - e^{\frac{-t}{T}} \qquad t \geq 0$$

وبفرض أن $a = \frac{1}{T}$

$$C(t) = 1 - e^{-at} \qquad t \geq 0 \qquad (17\text{-}3)$$

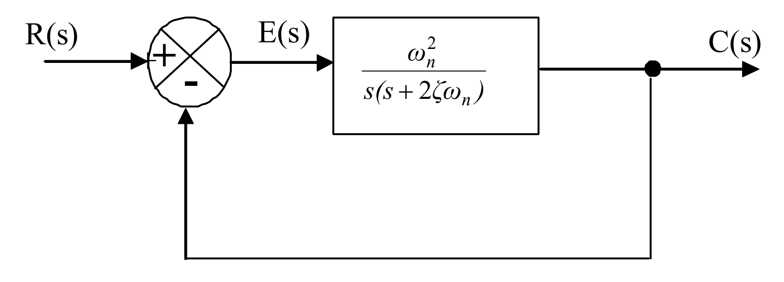
الشكل (5-6) يوضح الاستجابة العابرة لنظام من الرتبة الأولى مع دخل دالة الخطوة والتي تم رسمها من المعادلة (3-17).



الشكل(3-9) استجابة نظام من الرتبة الأولى.

٣- ٢- ٥. الاستجابة العابرة للأنظمة ذات الرتبة الثانية
Transient Response of Second Order Systems

لدراسة الاستجابة العابرة لنظام من الرتبة الثانية كما هو مبين بالشكل(3-10) حيث إندرجة S في المقام هي ٢.



الشكل(3-10) نظام من الرتبة الثانية.

نجد أن دالة التحويل لهذا النظام تكون:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (18\text{-}3)$$

حيث إن:

التردد الطبيعي غير المخمد ω_n is the undamped natural frequency

نسبة الإخماد ζ is the damping ratio of the system

وبفرض أن دخل النظام عبارة عن دالة الخطوة وقيمتها الواحد فإن استجابة النظام أي الخرج C(t) تتوقف على قيمة نسبة الإخماد damping ratio فيكون خرج هذا النظام باستخدام المعادلة (3-7) كالتالي:

$$C(s) = \frac{R(s)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

وبالتعويض عن $R(s) = \frac{1}{s}$ نجد أن:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad (19\text{-}3)$$

وبإجراء التحويل اللابلاسى العكسي للمعادلة (3-18) ينتج التالي:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - P_1} + \frac{A_2}{s - P_2}$$

حيث إن:

ثوابت الكسور الجزئية = A_1, A_2 constants of partial fraction

جذور معادلة الدرجة الثانية = P_1, P_2 roots of the second order equation

وعلى ذلك فإن استجابة النظام أي خرجه تكون كالتالي:

$$C(t) = 1 + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \qquad (20\text{-}3)$$

حيث إن:

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta - 1}} \qquad P_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta - 1}} \qquad P_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

مما سبق يتضح أن السلوك الديناميكي للأنظمة ذات الرتبة الثانية يعتمد على المتغيرات (A_1, A_2, P_1, P_2) والتي بدورها تتعلق بكل من (ζ, ω_n) كما في الحالات التالية:

أ- إذا كانت under damped system $0 \langle \zeta \langle 1$

يكون الجذران (P_1, P_2)مركبين ومترافقين Complex conjugates ويقعان في الجانب الأيسر من المستوى المركب S وتكون الثوابت (A_1, A_2)مركبة في هذه الحالة ويسمى النظام المضائل under damped system حيث إن:

$$P_1, P_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

وتكون الاستجابة العابرة له من معادلة الخرج هي:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sin(\omega_d t + \beta) \qquad (21\text{-}3)$$

حيث إن:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \qquad (22\text{-}3)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi}\right. \qquad (23\text{-}3)$$

حيث إن:

التردد الطبيعي المخمد بالمقدار $\sqrt{1 - \xi^2}$ ω_d = damping natural frequency.

ب- إذا كانت Critically damped System $\xi = 1$

يكون الجذران (P_1, P_2) حقيقيين وسالبين ومتساويين negative real and equal roots ويقعان في الجانب الأيسر من المستوى المركب S وتكون الثوابت (A_1, A_2) حقيقية في هذه الحالة ويسمى نظام الإخماد الحرجة critical damped system حيث إن:

$$P_1, P_2 = -\omega_n$$

وتكون الاستجابة العابرة له من معادلة الخرج هي:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 - \omega_o t) \qquad (24\text{-}3)$$

ج- إذا كانت Over damped System $\xi \rangle 1$

يكون الجذران (P_1, P_2) حقيقيين وسالبين وغير متساويين ويقعان في الجانب الأيسر من المستوى المركب S وتكون الثوابت (A_1, A_2) وفي هذه الحالة يسمى نظام الإخماد الزائد Over damped system حيث إن:

$$P_1, P_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

وتكون الاستجابة العابرة له من معادلة الخرج هي:

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{-a_1 t}}{a_1} - \frac{e^{-a_2 t}}{a_2}\right) \qquad (25\text{-}3)$$

حيث إن:

$$a_1 = \omega_n(\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2}) \qquad a_2 = \omega_n(\zeta - \sqrt{1 - \zeta^2})$$

د- إذا كانت Underdamped System $\zeta = 0$

يكون الجذران (P_1, P_2) تخيليين وغير متساويين ويقعان على المحور الرأسي من المستوى المركب S وفي هذه الحالة يسمى النظام غير المخمد وتكون الاستجابة العابرة له متذبذبة باستمرار حيث إن:

$$P_1, P_2 = \pm j\omega_n$$

وتكون الاستجابة العابرة له من معادلة الخرج هي:

$$c(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \qquad (26\text{-}3)$$

والشكل(3-11) يوضح تأثير جذور معادلة الخواص (مقام دالة التحويل الكلية) على إخماد استجابة الأنظمة ذات الرتبة الثانية عندما يكون الدخل دالة الخطوة وقيمتها الوحدة.

jω
s-plane
X X
0
σ
$\zeta \succ 1$
y(t)
1
0
t

jω
s-plane
X
X
0
σ
$\zeta = 1$
y(t)
1
0
t

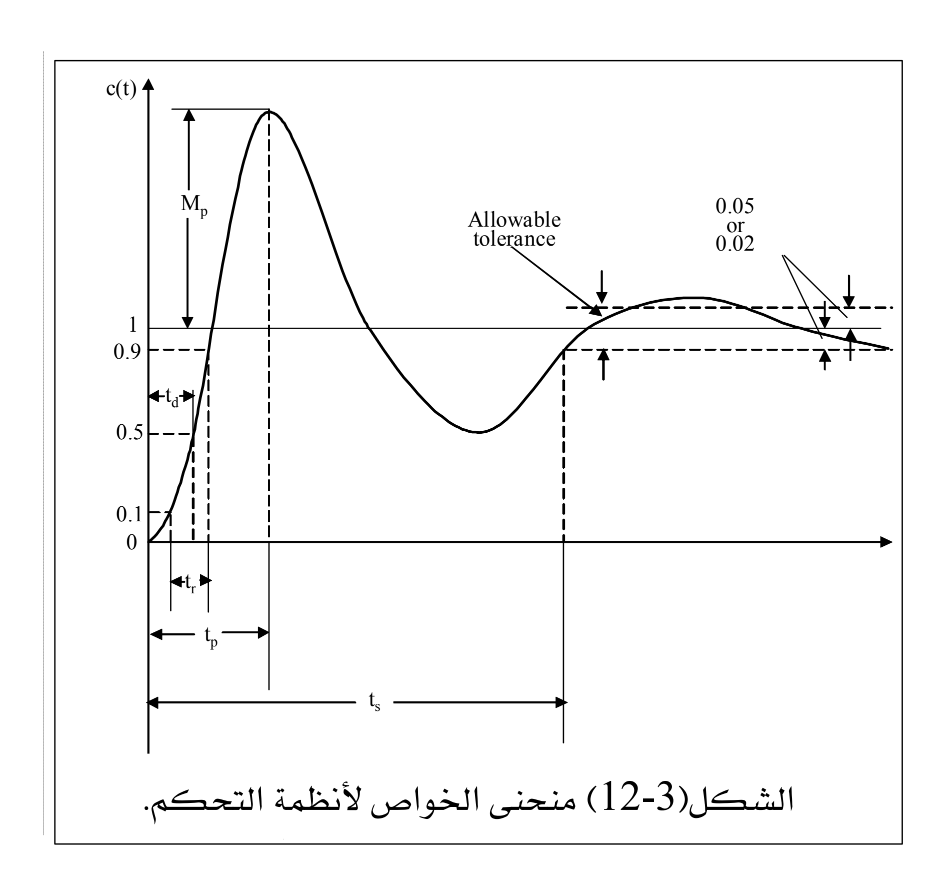
s-plane
jω
X
$0 \prec \zeta \prec 1$
0
σ
X
y(t)
1
0
t

jω
s-plane
X
0
σ
$\zeta = 0$
X
y(t)
1
0
t

الشكل(3-11) استجابة نظام من الرتبة الثانية لعدة قيم ζ.

٣- ٢- ٦. منحنى الخواص لأنظمة التحكم Definition of transient response Specifications

منحنى الأداء هو منحنى الاستجابة C(t) لنظام من الرتبة الثانية وتظهر فيه مواصفات الاستجابة العابرة عندما يكون الدخل دالة الخطوة وقيمتها الوحدة كما هو مبين بالشكل (12-3) ومبين عليه المواصفات المختلفة للاستجابة العابرة للنظام مثل (زمن التأخير- زمن الارتفاع - زمن القمة- أقصى تجاوز- زمن السكون).



الشكل(12-3) منحنى الخواص لأنظمة التحكم.

أ- زمن التأخير Delay Time(t_d)

ويعرف بأنه الزمن المطلوب لكي يصل الخرج إلى نصف قيمته النهائية لأول مرة.

ب - زمن الارتفاع Rise Time(t_r)

ويعرف بأنه الزمن المطلوب لكي يزداد الخرج من ١٠٪ إلى ٩٠٪ من قيمته النهائية . ويتم التعبير عنه كالتالي:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \qquad (27\text{-}3)$$

حيث إن β تقاس من المستوى المركب S بالراديان (rad) و ($\pi = 3.14$).

ويمكن حساب كل من β و ω_d كالتالي:

$$\beta = \cos^{-1}\zeta = \tan^{-1}(\frac{\omega_d}{\sigma}) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \qquad (28\text{-}3)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (29\text{-}3)$$

وتعرف σ بأنها معامل الإخماد أو ثابت الإخماد ويتم حسابها من العلاقة:

$$\sigma = \zeta\omega_n \qquad (30\text{-}3)$$

ج - زمن القمة (Peak Time t_p)

ويعرف بأنه الزمن المطلوب لكي يصل الخرج إلى أول قيمة قصوى للتجاوز عن القيمة النهائية ويتم التعبير عنه كالتالي:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad (31\text{-}3)$$

د – أقصى تجاوز Maximum Overshoot(M_p)

ويعرف بأنه أقصى قيمة يصل إليها خرج النظام (الاستجابة العابرة) متجاوزا بها القيمة النهائية ويتم التعبير عنه كنسبة مئوية كالتالي:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (32\text{-}3)$$

هـ- زمن السكون (Settling Time t_s)

ويعرف بأنه الزمن المطلوب لكي يصل الخرج (الاستجابة) ويبقى في حدود مدى معين عادة يكون (٢٪ إلى ٥٪) من القيمة النهائية. وهذه القيم تسمى معيار زمن السكون ويتم التعبير عنه في حالتين كالتالي:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \text{at 2\% criterion} \qquad (33\text{-}3)$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \text{at 5\% criterion} \qquad (34\text{-}3)$$

مثال (6-3):

في نظام التحكم ذي الرتبة الثانية والمبين في الشكل (5-7) يحتوي على نسبة إخماد $\zeta = 0.6$ وتردد طبيعي $\omega_n = 5$ rad/sec أوجد كلاً من:

أ- زمن الارتفاع (t_r)

ب - زمن القمة (t_p)

ج - زمن السكون (t_s)

د- أقصى تجاوز (M_p)

الحل:

يتم حساب التردد الطبيعي المضائل ومعامل الإخماد وكذلك الزاوية β كالتالي:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 5\sqrt{1-0.6^2} = 4 \text{ rad/sec}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0.6 \times 5 = 3$$

$$\beta = \tan^{-1}(\frac{\omega_d}{\sigma}) = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53.13^\circ$$

$$\beta = 53.13^\circ \times \frac{3.14}{180} = 0.93 \text{ rad}$$

أ- زمن الارتفاع rise time

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \sec$$

ب- زمن القمة peak time

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \sec$$

ج- زمن السكون settling time

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33\,\text{sec} \quad \text{for 2\% (criterion)}$$

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1\,\text{sec} \quad \text{for 5\% (criterion)}$$

د- أقصى تجاوز maximum overshoot

$$M_p = e^{(-\frac{\sigma}{\omega_d})\pi} = e^{-(\frac{3}{4})3.14} = 0.095$$

وتكون النسبة المئوية لأقصى تجاوز هي:

$$M_p = 0.095 \times 100 = 9.5\%$$

تمارين

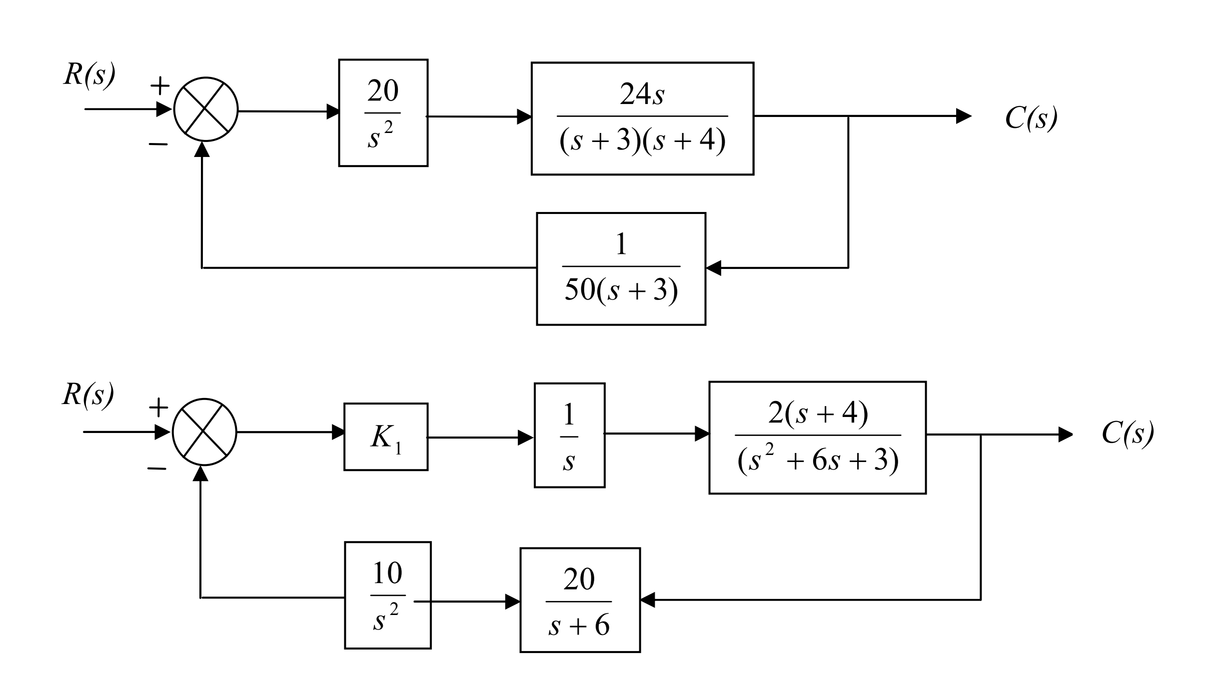
١ - أوجد نوع النظام system type لكل من الأنظمة ذات التغذية الخلفية التي دالة التحويل الخلفية لها تساوي الواحد unity feedback systems ودوال التحويل الأمامية لكل من هذه الأنظمة كالتالي:

(a) $G(s) = \dfrac{K}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$ (b) $G(s) = \dfrac{10e^{-0.2s}}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s(s+5(s+6)}$ (d) $G(s) = \dfrac{100(s-1)}{s^2(s+5(s+6)^2}$

(e) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s^3(s^2+5s+5)}$ (f) $G(s) = \dfrac{100}{s^3(s+2)^2}$

٢- أوجد نوع ورتبة النظام type and order للأنظمة ذات التغذية الخلفية المبينة في المخططات الصندوقية التالية.



٣- أوجد كلاً من المعاملات K_p, K_v and K_a (الوضع - والسرعة - والعجلة) لكل من الأنظمة ذات التغذية الخلفية التي دالة التحويل الخلفية لها تساوي الواحد unity feedback system ودوال التحويل الأمامية لكل من هذه الأنظمة كالتالي:

$$(a)\ G(s)=\frac{1000}{(1+0.1s)(1+10s)} \qquad (b)\ G(s)=\frac{100}{s(s^2+10s+100)}$$

$$(c)\ G(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.5s)} \qquad (d)\ G(s)=\frac{100}{s^2(s^2+10s+100)}$$

$$(e)\ G(s)=\frac{1000}{s(s+10)(s+100)} \qquad (f)\ G(s)=\frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$$

٤- أو جد خطأ حالة الاستقرار e_{ss} للأنظمة ذات التغذية الخلفية التالية .

$$(a)\text{ - }\ G(s)=\frac{1}{s^2+s+2} \qquad H(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(b)\text{ - }\ G(s)=\frac{1}{s(s+5)} \qquad H(s)=5$$

$$(c)\text{ - }\ G(s)=\frac{1}{s^2(s+10)} \qquad H(s)=\frac{s+1}{s+5}$$

$$(d)\text{ - }\ G(s)=\frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s)=5(s+2)$$

في حالة ما يكون الدخل:

أ- وحدة دالة الخطوة unit step input

ب- وحدة دالة الانحدار unit ramp input

٥- احسب كلاً من $\omega_n, \omega_d, \xi, t_r, t_p, M_p$ and t_s لنظام تحكم من الرتبة الثانية حيث إن دالة التحويل الكلية لهذا النظام هي:

$$M(s)=\frac{K}{s^2+10s+(7+K)}$$

عندما يكون الكسب الأمامي forward gain K هو:

(أ) K=18

(ب) K=218

(ج) K=618

ووضح تأثير زيادة K على استجابة هذا النظام.

٦- ليكن النظام التالي:

$$y'(t) + 10y(t) = 10x(t)$$
$$y(0) = 0$$
$$x(t) = \begin{cases} 5 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

أ. الثابت الزمني

ب. كسب النظام

ج. الاستجابة الزمنية

د. ارسم منحنى الاستجابة

٧- لدينا نظام من الرتبة الأولى ممثل بالمعادلة الآتية

$$10y'(t) + y(t) = x(t)$$
$$y(0) = 0$$
$$x(t) = \begin{cases} 10 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

أ. الثابت الزمني

ب. كسب النظام

ج. الاستجابة الزمنية

د. ارسم منحنى الاستجابة

٨- ليكن النظام التالي

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x(t)$$
$$y(0) = y'(0) = 0,$$
$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

أ. تردد الرنين ومعامل الإخماد ونوع الإخماد

ب. كسب النظام

ج. الاستجابة لخطوة ارتفاعها ١

د. ارسم منحنى الاستجابة

٩- ليكن النظام التالي

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 10x(t)$$
$$y(0) = y'(0) = 0,$$
$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

أ تردد الرنين ومعامل الإخماد ونوع الإخماد

ب كسب النظام

ج الاستجابة لخطوة ارتفاعها ١

د ارسم منحنى الاستجابة

١٠- ليكن النظام التالي

$$y''(t) + 4y'(t) + 8(t) = 16x(t)$$
$$y(0) = y'(0) = 0,$$
$$x(t) = \begin{cases} 5 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

أ تردد الرنين ومعامل الإخماد ونوع الإخماد

ب الاستجابة لخطوة ارتفاعها ١

ج ارسم منحنى الاستجابة